研究简讯

模糊实数空间与[−1，1] 上同序单调函数类的同胚*

郭嗣琮

辽宁工程技术大学基础科学部，阜新 123000

摘要 在模糊结构元概念的基础上，借助结构元方法，得到[−1，1] 上同序单调函数类与模糊实数空间的一一等距映射，证明了模糊实数空间与[−1，1] 上同序单调函数类同胚，这不仅为模糊分析理论研究开拓了一条新的途径，同时也降低了模糊实数空间性质研究的困难程度.

关键词 模糊数 模糊结构元 模糊泛函 同胚

1 闭区间上单调函数及延拓反函数

设 f 是[−1，1] 上单调有界函数，如果 f 不是连续的，f 在[−1，1] 上最多只有可列个第一类间断点，且 f 不是[−1，1] 到[$f(-1)$，$f(1)$] 的满射(这里假设 f 单增)．为将 f 的值域扩展到整个闭区间[$f(-1)$，$f(1)$] 上，引入单调函数延拓反函数概念，它实质上是单调函数的反函数在[$f(-1)$，$f(1)$] 上的延拓.

(Ⅰ)非连续单调函数在间断点处的集值延拓

对于[−1，1] 上非连续单调增函数 f，x_0 是[−1，1] 内的一个间断点．$f(x_0-0)=m_1$，$f(x_0+0)=m_2$，不妨仍假设 f 是单增的，有 $m_1<m_2$．定义 $f(x_0)$为一区间数[m_1，m_2]．如果对于 f 的所有间断点的函数值都重新定义为以该点左、右极限值为端点的闭区间数，则这个新的函数称为由 f 延拓的单调有界集值函数，记为 f．显然，f 的反函数 f^{-1} 存在.

(Ⅱ)连续非严格单调函数

不妨设 f 在[−1，1] 上连续非严格单增，则在[−1，1] 中至少存在一个点对$\{x_1, x_2\}$，使得 f 在区间[x_1，x_2] 上等于一个常数 $c=f(x_1)=f(x_2)$，并设 x_1，x_2 是使单增函数 f 等于常数的区间端点，即当 $x<x_1$ 时 $f(x)<c$ 且 $x>x_2$ 时 $f(x)>c$．此时，规定反函数 $f^{-1}(x)$在间断点 c 处是“靠 0 点连续的”，即当 $x_2\leqslant 0$ 时，$f^{-1}(c)=\lim\limits_{x\to c+0} f^{-1}(x)=y_+$；当 $x_1\geqslant 0$ 时，$f^{-1}(c)=\lim\limits_{x\to c-0} f^{-1}(x)=y_-$；当 $x_1<0<x_2$ 时，定义 $f^{-1}(c)$为两点集合$\{y_-, y_+\}$，记为 $f^{-1}(c)=\{y_-, y_+\}$.

设 f 是[a，b] 上任意的单调函数，对于 f 在[a，b] 内的常数区间和间断点处的反函数 f^{-1} 按(Ⅰ)和(Ⅱ)所述方式进行延拓，称 f^{-1} 是函数 f 的变量轮换对称函数或延拓反函数，仍记作 f^{-1}.

2 模糊结构元与变换

定义 1 设 E 为实数域 R 上的模糊集，隶属函数记为 $E(x)$，$x\in$R．如果 $E(x)$满足下述性质

1) $E(0)=1$，$E(1+0)=E(-1-0)=0$;

2) 在区间[−1，0)上 $E(x)$是单增右连续函数，在区间(0，1] 上是单降左连续函数;

3) 当 $-\infty<x<-1$ 或者 $1<x<+\infty$时，$E(x)=0$.

则称模糊集 E 为 R 上的模糊结构元.

定义 2 如果模糊结构元的隶属函数在区间(−1，1)上有 $E(x)>0$，且在(−1，0)内严格单增连续函数，在区间(0，1)上是严格单降连续函数，

2004-03-23 收稿，2004-04-26 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目(批准号：50174027，50244015)

E-mail: guosizong@163.net

则称 E 为正则的模糊结构元.

若 $E(x)=E(-x)$则称 E 为对称模糊结构元.

定理1(局部映射原理)[1] 设 E 是R上的任意模糊结构元，具有隶属函数 $E(x)$，又设函数 $f(x)$在区间$[-1,1]$上是单调有界的，$\hat{f}(x)$是 $f(x)$的延拓集值函数，则 $\hat{f}(E)$是R上有界闭模糊数，且$\hat{f}(E)$的隶属函数为 $E(f^{-1}(x))$，这里 $f^{-1}(x)$是$f(x)$关于变量 x 和 y 的轮换对称函数(若 $f(x)$在区间$[-1,1]$上是连续严格单调的，则 $f^{-1}(x)$是$f(x)$的反函数).

在不致于引起混淆的情况下，记$\hat{f}(x)$为$f(x)$，记$\hat{f}(E)$为$f(E)$.

定理2(模糊数的结构元表示定理)[1] 对于给定的一个正则模糊结构元 E 和任意的有限模糊数 A，总存在一个在$[-1,1]$上的单调有界函数 f，使得 $A=f(E)$(严格地说，存在 f 的集值延拓 $\hat{f}$，使得 $A=\hat{f}(E)$)，并称模糊数 A 是由模糊结构元生成的.

定理3[1] 设 f 是$[-1,1]$上单调有界函数，E 是R上给定模糊结构元，模糊数 $A=f(E)$. 对 $\forall\lambda\in(0,1]$，$E_\lambda=[e_\lambda^-, e_\lambda^+]$. 若 f 是$[-1,1]$上单增函数，则模糊数 A 的 λ 截集为R上的闭区间

$$\begin{aligned} A_\lambda &= [f(E)]_\lambda = f(E_\lambda) = \\ & f[e_\lambda^-, e_\lambda^+] = [f(e_\lambda^-), f(e_\lambda^+)], \end{aligned} \tag{1}$$

若 f 是$[-1,1]$上单降函数，则 A 的 λ 截集为闭区间 $A_\lambda=[f(e_\lambda^+), f(e_\lambda^-)]$.

3 同序标准单调有界函数类 $B_{[-1,1]}$

定义3 f 是$[-1,1]$上单调有界函数，如果对于 f 的任何间断点 $x\in[-1,1]$，都有

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)], \tag{2}$$

称 $f(x)$为$[-1,1]$上的标准单调有界函数. $[-1,1]$上的全体同序标准单调有界函数记为 $B_{[-1,1]}$.

易知，$[-1,1]$上单调有界连续函数是标准单调有界函数.

在 $B_{[-1,1]}$上(假定均为单增函数)分别引入距离

$$d_L(f,g)=\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|dx.\ f,g\in B_{[-1,1]}, \tag{3}$$

$$d_M(f,g)=\sup_{x\in[-1,1]}|f(x)-g(x)|,\ f,g\in B_{[-1,1]}. \tag{4}$$

定理4 距离空间$(B_{[-1,1]}, d_L)$和$(B_{[-1,1]}, d_M)$都是完备的.

证明：首先证明空间$(B_{[-1,1]}, d_L)$的完备性，不妨假定$(B_{[-1,1]}, d_L)$中元是单增的，对于单减情况有类似的结论. 设给定序列$\{x_n(t)\}$，其中 $x_n(t)\in(B_{[-1,1]}, d_L)$，$n=1, 2, \cdots$. 令

$$d_L(x_n, x_m)\to 0\quad (\text{对 } n, m\to\infty).$$

即序列$\{x_n(t)\}$在$[-1,1]$上满足 Cauchy 一致收敛条件. 设 $x_0(t)$是序列$\{x_n(t)\}$的极限，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n(t)=x_0(t)\quad \text{对于 } \forall t\in[-1,1].$$

由于所有的 $x_n(t)$是单增的函数，则对于 $\forall t_1, t_2\in[-1,1]$，有 $x_n(t_1)\leqslant x_n(t_2)$，于是

$$\lim_{n\to\infty}x_n(t_1)\leqslant\lim_{n\to\infty}x_n(t_2),$$

则 $x_0(t_1)\leqslant x_0(t_2)$，故 $x_0(t)$是单增函数.

又因为 $x_n(t)$有界，即对 $\forall t_0\in[-1,1]$，有 $|x_n(t_0)|\leqslant k_n(t_0)$($k_n(t_0)$是有限数). 由于 $d_L(x_n(t_0), x_m(t_0))\to 0$，即对于 $\forall\varepsilon>0$，存在$n_0(\varepsilon)$使得 $d_L(x_n(t_0), x_m(t_0))<\varepsilon$(其中 $n, m\geqslant n_0(\varepsilon)$). 设 $x_n(t_0)\to x_0(t_0)$，有

$$|x_n(t_0)-x_0(t)|\leqslant\varepsilon\quad \text{对于所有 } n\geqslant n_0(\varepsilon)$$

由此，有

$$\begin{aligned} |x_n(t_0)| &= |(x_n(t_0)-x_{n_0(\varepsilon)}(t_0))+x_{n_0(\varepsilon)}(t_0)| \\ &\leqslant |x_0(t_0)-x_{n_0(\varepsilon)}(t_0)|+|x_{n_0(\varepsilon)}(t_0)| \\ &\leqslant\varepsilon+k_{n_0}(t_0), \end{aligned}$$

即对 $\forall t_0\in[-1,1]$，$x_0(t_0)$有界，故 $x_0(t)$有界. 于是 $x_0(t)\in(B_{[-1,1]}, d_L)$，所以$(B_{[-1,1]}, d_L)$是完备的.

再证明空间$(B_{[-1,1]}, d_M)$的完备性. 设给定度量空间$(B_{[-1,1]}, d_M)$中满足 Cauchy 一致收敛条件

的序列$\{x_n(t)|n=1, 2, \cdots\}$，并设 $x_0(t)$是序列$\{x_n(t)\}$的极限(对于 $\forall t\in[-1, 1]$). 类似前面的证明易知 $x_0(t)$是$[-1, 1]$上单调有界函数，只要证明 $x_0(t)$是标准的.

由于 $d_M(x_n(t), x_0(t))\to 0$，即对于 $\forall\varepsilon>0$，存在 $n_0(\varepsilon)$，使当 $n\geqslant n_0(\varepsilon)$时，

$$d(x_n(t), x_0(t))=\sup_{t\in[-1,1]}|x_n(t)-x_0(t)|<\varepsilon.$$

设 t_0 是 $x_0(t)$的间断点，所有的 $x_n(t)(n=1, 2, \cdots)$都是标准的，如果 $x_0(t)$不是标准的，即

$$x_0(t_0)\neq\frac{1}{2}[x_0(t_0+0)+x_0(t_0-0)].$$

令 $x_0(t_0)-\frac{1}{2}[x_0(t_0+0)+x_0(t_0-0)]=\delta>0$，由于 $\sup_{t\in[-1,1]}|x_n(t_0+0)-x_0(t_0+0)|<\varepsilon$，$\sup_{t\in[-1,1]}|x_n(t_0-0)-x_0(t_0-0)|<\varepsilon$ 和 $\sup_{t\in[-1,1]}|x_n(t_0)-x_0(t_0)|<\varepsilon$ 均成立. 取 $\varepsilon<\delta$时，当 $n\geqslant n_0(\varepsilon)$时，则有

$$x_n(t_0)\neq\frac{1}{2}[x_n(t_0+0)+x_n(t_0-0)],$$

故$\{x_n(t)\}$不是标准函数序列. 所以，$x_0(t)$一定是标准的.

一般地，$f\in B_{[-1,1]}$，$-f\notin B_{[-1,1]}$，除非 f 是常值函数. 因为，如果 f 在$[-1, 1]$上不是常值函数，尽管$-f$ 也是单调函数，但是与 f 不是同序的. 所以，$B_{[-1,1]}$上关于加法运算不构成群，只是半群.

需要指出，$B_{[-1,1]}$上的元对于函数的普通减法运算一般是不封闭的，可以举例，两个单调函数相减得到的函数可能是非单调的. 所以，$B_{[-1,1]}$关于加法和数乘并不构成线性空间.

定理 5　$B_{[-1,1]}$是以 0 为顶点的凸锥.

定理是显然的，证略.

4　由结构元导出的 $B_{[-1,1]}$ 上的模糊泛函

用 E 表示实数域 R 上的对称正则模糊结构元，$\mathbb{N}_c(\mathrm{R})$表示R 上所有有界闭模糊数的全体，由定理 1 和定理 2，对于任给的函数 $f\in B_{[-1,1]}$，存在惟一的模糊数 $A_f=f(E)$与之对应，即由模糊结构元决定了 $B_{[-1,1]}$到 $\mathbb{N}_c(\mathrm{R})$上的一个映射.

记 $H_E: B_{[-1,1]}\to\mathbb{N}_c(\mathrm{R})$；$f\to H_E(f)=f(E)\in\mathbb{N}_c(\mathrm{R})$，称 H_E 为模糊结构元 E 导出的$B_{[-1,1]}$上的模糊泛函. 利用 $B_{[-1,1]}$上的距离 d_L 和d_M，由映射 H_E 可以诱导出 $\mathbb{N}_c(\mathrm{R})$上的距离

$$d_{NL}(A,B)=d_L(H_E^{-1}(A),H_E^{-1}(B)),\quad(5)$$

$$d_{NM}(A,B)=d_M(H_E^{-1}(A),H_E^{-1}(B)),\quad(6)$$

其中 $H_E^{-1}(A)$和 $H_E^{-1}(B)$分别为 A 和B 在映射 H_E 下的原像.

设 $A=f(E)$，$B=g(E)$，其中 f，$g\in B_{[-1,1]}$，则(5)和(6)式也可以写作

$$d_L(f,g)=d_{NL}(H_E(f),H_E(g)),\quad(7)$$

$$d_M(f,g)=d_{NM}(H_E(f),H_E(g)).\quad(8)$$

称$(\mathbb{N}_c(\mathrm{R}), d_{NL})$和$(\mathbb{N}_c(\mathrm{R}), d_{NM})$分别为由映射 H_E 从$(B_{[-1,1]}, d_L)$和$(B_{[-1,1]}, d_M)$导出的距离空间. 易知，H_E 是从 $B_{[-1,1]}$到$\mathbb{N}_c(\mathrm{R})$上的一一等距映射.

利用等距映射 H_E，可以将模糊实数空间元素的度量转换为$[-1, 1]$上同序标准单调有界函数间的度量. 那么，这种度量和人们已熟知的模糊实数间的度量有什么联系呢？

定理 6　设 E 是正则结构元，A，$B\in\mathbb{N}_c(\mathrm{R})$，有 f，$g\in B_{[-1,1]}$，使得 $A=f(E)$，$B=g(E)$. 对 $\forall\lambda\in(0, 1]$，记 $A_\lambda=[a^-(\lambda), a^+(\lambda)]$，$B_\lambda=[b^-(\lambda), b^+(\lambda)]$，则

$$d_{NL}(A,B)=\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(|a^-(\lambda)-b^-(\lambda)|+|a^+(\lambda)-b^+(\lambda)|)\mathrm{d}\lambda\quad(9)$$

$$d_{NL}(A,B)=\sup_{x\in[-1,1]}|f(x)-g(x)|=\sup_{x\in[0,1]}(|a_\lambda^--b_\lambda^-|\vee|a_\lambda^+-b_\lambda^+|)\quad(10)$$

证明：先证明(9)式. 设 f，$g\in B_{[-1,1]}$，使得 $A=f(E)$，$B=g(E)$. 对 $\forall\lambda\in(0, 1]$，$E_\lambda=[e_\lambda^-, e_\lambda^+]$ 由于 E 是正则的，则当 $\lambda=1$ 时，$e_\lambda^-=e_\lambda^+=0$；当 $\lambda<1$ 时，$e_\lambda^-\in[-1, 0)$，$e_\lambda^+\in(0, 1]$. 由定理

3，有

$$a^-(\lambda)=f(e_\lambda^-),\ b^-(\lambda)=g(e_\lambda^-),\tag{11}$$

$$a^+(\lambda)=f(e_\lambda^+),\ b^+(\lambda)=g(e_\lambda^+),\tag{12}$$

则

$$a^-(\lambda)-b^-(\lambda)=f(e_\lambda^-)-g(e_\lambda^-),\tag{13}$$

$$a^+(\lambda)-b^+(\lambda)=f(e_\lambda^+)-g(e_\lambda^+).\tag{14}$$

不妨假设在(0，1)内 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均连续，设 $x=e_\lambda^+$. 由(14)式，得到

$$a^+(\lambda)=f(x),\ b^+(\lambda)=g(x).\tag{15}$$

记 $a^+(\lambda)-b^+(\lambda)=\Phi(\lambda)$，$f(x)-g(x)=F(x)$. 由(15)式，有 $\Phi(\lambda)=F(x)$，$0<x<1$，$0<\lambda<1$. 根据正则结构元的定义，$E(x)$是连续函数，且在(－1，0)内严格单增，在(0，1)上严格单降. 在 $0<x<1$ 和 $0<\lambda<1$ 内存在 x 和 λ 的一一对应 $\lambda=\lambda(x)$，进而，有

$$\int_0^1\Phi(\lambda)\mathrm{d}\lambda=\int_0^1F(x)\mathrm{d}x$$

或

$$\int_0^1|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x=\int_0^1|a^+(\lambda)-b^+(\lambda)|\mathrm{d}\lambda.$$

类似地，在(－1，0)内可以得到

$$\int_{-1}^0|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x=\int_0^1|a^-(\lambda)-b^-(\lambda)|\mathrm{d}\lambda.$$

故有

$$\int_{-1}^1|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x=\int_0^1(|a^-(\lambda)-b^-(\lambda)|+|a^+(\lambda)-b^+(\lambda)|)\mathrm{d}\lambda.$$

再证明（10）式. 因为 $\sup\limits_{x\in[-1,1]}|f(x)-g(x)|=(\sup\limits_{x\in[-1,0]}|f(x)-g(x)|\vee\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|)$. 在(9)式的证明中，当 $-1<x<0$，$|f(x)-g(x)|=|a_\lambda^- - b_\lambda^-|$，$0<\lambda<1$；当 $0<x<1$，有 $|f(x)-g(x)|=|a_\lambda^+ - b_\lambda^+|$，于是

$$(\sup_{x\in[-1,0]}|f(x)-g(x)|)\vee(\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|)=\sup_{\lambda\in[0,1]}(|a_\lambda^- - b_\lambda^-|\vee|a_\lambda^+ - b_\lambda^+|).$$

命题1 设(X,d_X)，(Y,d_Y)是两个距离空间，F 是从(X,d_X)到(Y,d_Y)上的一一等距映射，则 F 是连续的，且 F 的逆映射 F^{-1}存在并连续.

证明：由于 F 是从(X,d_X)到(Y,d_Y)上的一一映射，则逆映射 F^{-1}存在，也是一一的. 根据连续映射的定义，$\forall x_0\in X$，对于任何正数 ε，总存在一个正数 δ，使得当 $d_X(x,x_0)<\delta$时，有 $d_Y(F(x),F(x_0))<\varepsilon$. 因为 $d_X(x,x_0)=d_Y(F(x),F(x_0))$，对于给定的 ε，只要取 $\delta\leqslant\varepsilon$(例如取 $\delta=\varepsilon/2$)即可，故 F 是连续的. 类似地可以证明逆映射 F^{-1}也是连续的.

因为存在 $B_{[-1,1]}$ 到 $\mathbb{N}_c(\mathrm{R})$的一一映射 H_E，并且 H_E 及逆映射 H_E^{-1} 均连续，所以有如下结论：

定理7 距离空间$(B_{[-1,1]},d_L)$与$(\mathbb{N}_c(\mathrm{R}),d_{NL})$同胚；$(B_{[-1,1]},d_M)$与$(\mathbb{N}_c(\mathrm{R}),d_{NM})$同胚.

定理8 模糊实数空间$(\mathbb{N}_c(\mathrm{R}),d_{NL})$和$(\mathbb{N}_c(\mathrm{R}),d_{NM})$都是完备的距离空间.

5 结语

由于模糊结构元的单调映射建立了有界模糊实数空间与[－1，1]上同序单调有界函数类的同胚性质，因此，对模糊实数空间的任何度量性质的研究都可以转换为[－1，1]上同序单调有界函数类相应性质的研究. 如，模糊数列的收敛性、模糊级数的敛散性、模糊值函数的连续性等等，相应的结果见文献[2~5]. 从这个意义上说，模糊结构元理论为模糊分析学的研究开辟了一个新的有效途径.

参 考 文 献

1 郭嗣琮. 模糊分析中的结构元方法（I）、（II）. 辽宁工程技术大学学报，2002，21(5)：670；21(6)：808

2 郭嗣琮. 基于模糊结构元理论的模糊分析数学原理. 沈阳：东北大学出版社，2004

3 吴从炘 等. 模糊值函数分析学的若干进展. 模糊系统与数学，2002，16(专辑)：1

4 罗承忠. 模糊集合引论. 北京. 北京师范大学出版社，1994

5 Chang S L et al. On fuzzy mapping and control. IEEE Trans SMC，1972，2：30